

## جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رضائی  
بهار ۱۴۰۳



مقدار و بردار ویژه، ماتریس‌های متقارن، تجزیه مقدار تکین

### تمرین تئوری هفتم

تاریخ انتشار: ۲۱ خرداد ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود در مورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمرین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمرین: دانشجویان می‌توانند در حل تمرین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده‌ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتماً در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

پرسش ۱ (۲۵ نمره) فرض کنید تجزیه مقادیر ماتریس  $A$  به شکل زیر میباشد:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ x & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & y \end{pmatrix}$$

الف) مقادیر  $x$  و  $y$  را بدست آورید.  
ب) موارد زیر را از روی این تجزیه به دست آورید:

- رنک ماتریس  $A$
  - مقادیر ویژه  $AA^T$  و  $A^T A$
  - یک بردار ویژه  $AA^T$  ناصفر
- پ) بدون محاسبه مستقیم ماتریس  $A$  بردار

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$A$  را بدست آورید.

ث)  $v$  یک بردار ناصفر در فضای  $R^2$  می باشد. ماکسیمم عبارت  $\frac{\|Av\|}{\|v\|}$  چقدر است و به ازای چه بردار  $v$  حاصل میشود؟  
ج) ماتریس  $A^t$  که شبه معکوس وارون  $A$  هست را محاسبه کنید.

پرسش ۲ (۲۵ نمره) اگر ماتریس  $\mathbf{A}_{m \times n}$  و  $\mathbf{B}_{n \times m}$  به گونه ای باشند که  $\mathbf{AB}$  یک projection orthogonal بر روی  $range(A)$  و  $\mathbf{BA}$  یک orthogonal projection بر روی  $range(B)$  باشد و همچنین داشته باشیم روی  $range(B) = range(A^*)$  باشد  $B = A^+$  نشان دهید

پرسش ۳ (۳۰ نمره)

فرض کنید  $Q$  یک ماتریس  $n \times n$  و مثبت معین متقارن باشد. اگر  $0 < \lambda < \bar{\lambda}$  به گونه ای باشد که

$$\lambda \|u\|^2 \leq u^T Q u \leq \bar{\lambda} \|u\|^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

ثابت کنید همه مقادیر ویژه  $Q$  باید در بازه  $[\lambda, \bar{\lambda}]$  قرار داشته باشند.

پرسش ۴ (۲۰ نمره) می دانیم  $T \in L(V)$ . فرض کنید  $\hat{s}$  کوچکترین مقدار منفرد  $T$  و  $s$  بزرگترین مقدار منفرد  $T$  باشد.

الف) ثابت کنید که  $\|Tv\| \leq s\|v\|$  و  $\hat{s}\|v\| \leq \|Tv\|$  برای هر  $v \in V$ .

ب) فرض کنید  $\lambda$  یک مقدار ویژه  $T$  باشد. ثابت کنید که  $s \leq |\lambda| \leq \hat{s}$ .